

Guía Integrales Múltiples. MAT-024
por P.A.

1.- Integrales dobles

1. Considere la función $f(x, y) = \frac{y-x}{(x+y)^3}$ definida en el dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.
 - (a) Verifique que las integrales iteradas de $f(x, y)$ sobre Ω existen pero son distintas.
 - (b) Justifique el hecho anterior.
2. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ definida en la bola Ω de radio R centrada en el origen. Encuentre cotas para $\int_{\Omega} f \, dA$.
3. Calcule las siguientes integrales verificando que se cumplan las hipótesis del teorema de Fubini:
 - (a) $\int \int_{\Omega} x^2 \sin(xy) \, dx dy$, $\Omega = [0, \pi] \times [0, 1]$
 - (b) $\int \int_{\Omega} \frac{y \, dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, en donde Ω es un cuadrado de lado uno cuyo vértice inferior izquierdo está en el origen.
 - (c) $\int \int_{\Omega} (2\sqrt{x} - 3y^2) \, dx dy$, donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x}\}$
 - (d) $\int \int_{\Omega} xy \, dx dy$, donde Ω es la región limitada por los arcos:
 $A_1 : y = 9 - x^2; 0 \leq x \leq 3$
 $A_2 : y = 9(1 - x^2); 0 \leq x \leq 1$
 $A_3 : y = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3); 1 \leq x \leq 3$
4. Encuentre el área de la región plana R situada debajo de la parábola $y = 4x - x^2$, encima del eje $y = 0$ y a la derecha de la recta $y = 6 - 3x$.

2.- Cambios de coordenadas en integrales dobles

1. Calcule $\int \int_{\Omega} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.
2. Integre la función $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ sobre la región encerrada por un lazo de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.
3. Sea el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$, $a > 0$. Considere el cambio de coordenadas

$$T : \begin{cases} x &= u \cos^3 v \\ y &= u \sin^3 v \end{cases}$$

- (a) Demuestre que T es una transformación de coordenadas válida.
 - (b) Determine el dominio Ω en las nuevas coordenadas (u, v) .
 - (c) Calcule $I = \int_{\Omega} f \, dA$, si $f(x, y) = (a^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3})^2$.
4. Calcule la integral $I = \int \int_{\Omega} \sin(9x^2 + 4y^2) \, dx dy$, donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.
Sugerencia: Use un cambio de coordenadas que transforme una elipse en una circunferencia.

5. El radio de rotación de una lámina delgada alrededor de un eje de rotación es el número R , el cual cumple que $MR^2 = I$, donde M es la masa de la lámina, I es el momento de inercia alrededor del eje dado. Encuentre el radio de rotación R de una lámina circular $x^2 + y^2 \leq 1$, que rota alrededor de un eje perpendicular a la lámina y que pasa por el centro de la lámina, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia al centro del círculo.
6. La cantidad de lluvia que cae sobre un punto (x, y) durante un año es $f(x, y)$ centímetros. Sea R cierta región geográfica y suponga que las áreas se miden en cms^2 .
- (a) ¿Qué representa $f(x, y)dxdy$?
- (b) ¿Qué representa $\int_R f(x, y)dA$?
- (c) ¿Qué representa $\frac{\int_R f(x, y)dA}{\int_R dA}$?
- (d) Suponga que R se divide en dos subregiones disjuntas R_1, R_2 . Se sabe además que

$$\frac{\int_{R_1} f(x, y)dA}{\int_{R_1} dA} = p_1; \quad \frac{\int_{R_2} f(x, y)dA}{\int_{R_2} dA} = p_2,$$

y que las áreas de R_1 y R_2 son A_1 y A_2 , respectivamente. Encuentre una expresión para $\frac{\int_R f(x, y)dA}{\int_R dA}$.

7. Sea L_1 la recta perpendicular a una lámina circular que además pasa por su centro. Sea L_2 una recta paralela a L_1 que se encuentra a una distancia a de L_1 . Sea I_i el momento de inercia alrededor de la recta L_i , $i = 1, 2$. Si la masa de la lámina es M y su densidad es constante, pruebe que

$$I_2 = I_1 + a^2M$$

Comente este resultado.

3.- Integrales triples

1. Calcule $\int \int \int_{\Omega} (x + y + z + 2)^{-1/2} dx dy dz$, donde $\Omega = [0, 2] \times [0, 1] \times [-1, 4]$.
2. Encuentre $\int \int \int_{\Omega} z dx dy dz$, donde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.
3. Halle el volumen del cuerpo limitado inferiormente por el plano XY, con lados dados por los planos $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, y acotado superiormente por el paraboloides elíptico $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$; $a, b, p, q > 0$.
4. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje Z del tetraedro homogéneo acotado por los planos $z = x + y, x = 0, y = 0, z = 1$.
5. Un bloque sólido homogéneo de masa M está acotado por los planos $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$. Demuestre que el momento de inercia con respecto al eje X es $\frac{M}{3}(b^2 + c^2)$. Especule sobre los valores de los momentos de inercia con respecto a los otros ejes cartesianos.
6. Encuentre $F'(t)$ si

$$F(t) = \int \int \int_{\Omega(t)} f(xyz) dx dy dz,$$

con $\Omega(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 < x < t, 0 < y < t, 0 < z < t\}$ y donde f es una función diferenciable.

4.- Cambios de coordenadas en Integrales triples

1. Hallar el volumen V del sólido formado por los puntos interiores del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ que están situados sobre el plano $z = 0$ y bajo el paraboloido $z = x^2 + y^2$.

2. Calcule

$$I = \int \int \int_{\Omega} \frac{yz}{x} dx dy dz,$$

con $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 < ax, x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$.

3. Calcule el volumen V del sólido S encerrado en el interior de la superficie de ecuación $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2z(x^2 + y^2)$.

4. Sea la superficie cerrada $r = 1 - \cos \varphi$, donde (r, θ, φ) son las coordenadas esféricas.

(a) Haga un bosquejo suficientemente claro de la superficie.

(b) Calcule el volumen del sólido encerrado por la superficie.

5. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$, si la densidad es proporcional a la distancia en cada punto.

6. Un sólido está limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, $z > 0$ y por la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. La densidad en cada punto del sólido es proporcional a la distancia de dicho punto al origen.

(a) Encuentre la forma explícita de la densidad si la masa del sólido es 1.

(b) Encuentre el centro de masa.

7. Hallar el momento de inercia de una bola no homogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ de masa M respecto de su diámetro, si la densidad $\rho(x, y, z)$ de la bola en cada punto (x, y, z) es:

(a) Proporcional a la distancia de este punto al centro de la bola.

(b) $\rho(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$.

8. Calcule la integral

$$I = \int \int \int_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

donde Ω es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. **Sugerencia:** Efectúe un cambio de coordenadas que transforme un elipsoide en una esfera.